

Αξιοποίηση από εκπαιδευτικούς του υλικού της ιστοσελίδας μαθηματικών creativemathpathways.sch.gr: Το παράδειγμα εικονογραφημένου αριθμητικού προβλήματος

Δρ Δεληκανάκη Νίκη
επ. Σχολική Σύμβουλος Π. Α.
ndelikanaki@gmail.com

Δρ Περικλειδάκης Γεώργιος
Σχολικός Σύμβουλος Π. Ε.
gperiklidakis@gmail.com

MSc Γαλανάκης Ιωάννης
Δ/ντής 12^{ου} Δ.Σ. Ηρακλείου
igalanakis@gmail.com

Τζαγκαράκης Ελευθέριος
Εκπαιδευτικός ΠΕ19 στην ΠΔΕ Κρήτης
eltzaster@gmail.com

Περίληψη

Η εργασία αναφέρεται σε εικονογραφημένα αριθμητικά προβλήματα μεταβολής. Έκαστο αριθμητικό πρόβλημα εξελίσσεται σε 3 εικονογραφημένες κάρτες, οι οποίες σειροθετούνται με χρονική αλληλουχία, σύμφωνα με την επίλυση τους. Κατασκευάστηκαν από νήπια σε 7 τάξεις νηπιαγωγείων κατά το γ' τρίμηνο του σχολικού έτους 2014-15 και αναρτήθηκαν στην ιστοσελίδα Μαθηματικών creativemathpathways.sch.gr. Η ιστοσελίδα αυτή περιέχει δημιουργικό υλικό Μαθηματικών για παιδιά 4-8 ετών και λειτουργεί στην πλατφόρμα του Πανελλήνιου Σχολικού Δικτύου. Εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της υποστήριξης των παιδιών προσχολικής και πρωτοσχολικής ηλικίας στα Μαθηματικά, με τη συνεισφορά των νέων τεχνολογιών.

Λέξεις-κλειδιά: προσχολική, αριθμητικό πρόβλημα, νέες τεχνολογίες.

1. Η ιστοσελίδα μαθηματικών

Η ιστοσελίδα creativemathpathways.sch.gr (δημιουργικά μαθηματικά μονοπάτια) δημιουργήθηκε και διαχειρίζεται από τους εκπαιδευτικούς Γαλανάκη Ι., Δεληκανάκη Ν., Περικλειδάκη Γ. και Τζαγκαράκη Ε. Λειτουργεί στην πλατφόρμα του Πανελλήνιου Σχολικού Δικτύου, το οποίο αποτελεί το επίσημο εκπαιδευτικό ενδοδίκτυο για τα σχολεία της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα, διασυνδέοντας σχολεία και εκπαιδευτικούς.

Ο γενικότερος σκοπός της ιστοσελίδας είναι η υποστήριξη των παιδιών από την προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία στα Μαθηματικά, σύμφωνα με τα ισχύοντα Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και Νέα Προγράμματα Σπουδών (ΝΠΣ), μέσα από δημιουργικούς τρόπους και με έμφαση στις νέες τεχνολογίες, η καλλιέργεια θετικών στάσεων στην κατεύθυνση της πρόληψης της αποτυχίας στα Μαθηματικά και η δημιουργία μιας διαδικτυακής κοινότητας μάθησης και ψυχαγωγίας για μαθητές και εκπαιδευτικούς.

Το περιεχόμενο της, που συνίσταται σε πρωτότυπο υλικό Μαθηματικών, απευθύνεται σε παιδιά 4-8 ετών. Η επιλογή του εύρους ηλικίας έγινε σύμφωνα με το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, το οποίο αναπτύσσεται, σε τρεις ηλικιακούς κύκλους κατά την υποχρεωτική εκπαίδευση, από τους οποίους ο πρώτος κύκλος είναι 5-8 ετών δηλ. νηπιαγωγείο, Α' και Β' Δημοτικού (Τζεκάκη, 2010, 2011, ΝΠΣ, 2011). Το μαθηματικό περιεχόμενο έχει κατασκευαστεί στο μεγαλύτερο μέρος του στη σχολική τάξη από μαθητές νηπιαγωγείων και δημοτικών σχολείων σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς και με τους αντίστοιχους Σχολικούς Συμβούλους σε πλαίσιο συνεργατικών μαθησιακών διαδικασιών, με συνοδές επιμορφωτικές δράσεις των Συμβούλων (Δεληκανάκη, 2012). Περιλαμβάνονται οι εξής 7 κατηγορίες περιεχομένου: α) Μαθηματικά παραμύθια, β) Ταινίες κινουμένων σχεδίων (animation), γ) Παζλ διαδραστικά, δ) Βάλε στη σωστή σειρά, ε) Προσωπικότητες Μαθηματικών, στ) Γρίφοι, χιούμορ, ζ) Ιστοσελίδες, βιβλία κ.α. για εκπαιδευτικούς/γονείς.

Για την ιστοσελίδα χρησιμοποιήθηκε το **Joomla**, το οποίο είναι ένα ελεύθερο και ανοικτού κώδικα σύστημα διαχείρισης περιεχομένου και τα δεδομένα του αποθηκεύτηκαν σε βάση δεδομένων στο Σχολικό Δίκτυο. Τα **Web 2.0 εργαλεία** που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη φάση δημιουργίας της ιστοσελίδας, για 2 από τις κατηγορίες περιεχομένου, είναι:

1. **Δημιουργία online παζλ:** στη διεύθυνση www.jigsawplanet.com έχουν δημιουργηθεί online παζλ με ζωγραφιές μαθητών σχολείων με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται ο αριθμός κομματιών, να περιστρέφονται, ενώ μπορούν να ενσωματώνονται σε άλλο ιστολόγιο ή ιστοσελίδα ή τέλος να διαμοιράζεται ο υπερσύνδεσμος σε άλλα μέσα.

2. **Δημιουργία χρονογραμμής:** με τη χρήση του web 2.0 εργαλείου <http://www.tiki-toki.com/> Το Tiki-Toki επιτρέπει να δημιουργηθούν εντυπωσιακές, διαδραστικές χρονογραμμές. Είναι ιδανικό ως εργαλείο παρουσίασης με χρονολογική σειρά βιογραφιών μεγάλων Μαθηματικών που αναφέρονται στις τάξεις του Δημοτικού. Μπορεί να ενσωματωθεί video, φωτογραφίες, υπερσύνδεσμοι και κείμενο. Κάθε χρονογραμμή έχει το δικό της, μοναδικό URL και μπορεί να ενσωματωθεί σε άλλα ιστολόγια ή ιστοσελίδες. Η χρήση του γίνεται αποκλειστικά διαδικτυακά.

Στην κατηγορία «Βάλε στη σωστή σειρά» περιλαμβάνονται εκτυπώσιμα αρχεία με εικόνες που συνθέτουν σε αλληλουχία χρονικής διαδοχής ιστορίες, με νόημα αριθμητικού προβλήματος, τις οποίες κατασκεύασαν μαθητές νηπιαγωγείων. Η δυνατότητα σειροθέτησης αυτών εμπεριέχει δυο διαστάσεις, α) τη σειροθέτηση εικόνων σε αλληλουχία χρονικής διαδοχής με νόημα αφενός και β) την ταυτόχρονη ικανοποίηση της συνθήκης αντίληψης - επίλυσης του εμπεριεχόμενου αριθμητικού προβλήματος αφετέρου. Οι εικόνες προσφέρουν μοναδικό πλεονέκτημα κατανόησης για το παιδί, διότι αποτελούν διακριτά βήματα στην εκτέλεση μιας αριθμητικής

πράξης με συνέπεια, δηλ. στην 1η εικόνα απεικονίζεται μια αρχική κατάσταση ποσότητας, στη 2η μια μεταβολή στην ποσότητα και στην 3η εμφανίζεται το αποτέλεσμα, με εικονιστική και συμβολική αναπαράσταση (αριθμητικά σύμβολα).

2. Σειροθέτηση ιστοριών αριθμητικών προβλημάτων

2α. Η αντίληψη των γεγονότων ως ακολουθία χρονικής διαδοχής

Πολλά γεγονότα γίνονται αντιληπτά ως «σενάρια» στην καθημερινή ζωή, δηλ. ως μια αλληλουχία μερών με νόημα, ενώ φαίνεται ότι από την ηλικία των 3 ετών περίπου τα παιδιά αναπαριστούν διαμέσου του συμβολικού παιχνιδιού τέτοια σενάρια, δείχνοντας ότι έχουν συγκροτήσει αναπαραστάσεις αυτών των γνωστικών δομών. Έρευνες έδειξαν ότι παιδιά 2-3 ετών αντιλαμβάνονταν μικρές ακολουθίες γεγονότων και σειροθετούσαν αυτά απεικονισμένα σε κάρτες με κανονική σειρά (από την αρχή ως το τέλος), ακόμα κι αν δεν καταλάβαιναν την αντιστρεψιμότητα της χρονικής σειροθέτησης, εφόσον οι εικόνες ολοκλήρωναν ένα λογικό νόημα σε οικείο γεγονός. Ακόμα, έτειναν να παραλείπουν από χρονική σειροθέτηση με ανάκληση φάσεις γεγονότων που δεν ταίριαζαν λογικά στη σειρά. (Fivush & Mandler, 1985).

Σε άλλη έρευνα χρονικής σειροθέτησης με παιδιά 3-6 ετών διαπιστώθηκε, ότι με την πρόοδο της ηλικίας αυξάνουν τις επιτυχείς επιδόσεις τους. Έτσι, σε πιο ανώριμες περιόδους, στις προς διάταξη εικόνες μπορεί να μην αντιλαμβάνονται τα μέρη ως συνθετικά σε μια ενιαία ιστορία, αλλά αποσπασματικά, δηλαδή αντιλαμβάνονται στατικά σε κάθε εικόνα μια ιστορία, ή μπορεί να μη διατάσσουν σύμφωνα με το λογικό νόημα, αλλά να προσπαθούν να συγκολλήσουν τις εικόνες χωροταξικά σαν παζλ. Αυτές οι γνωστικές συμπεριφορές παραμερίζονται όσο αυξάνεται η γνωστική συγκρότηση του παιδιού μέσα από πολύπλοκες διανοητικές διαδικασίες. (Bornens, 1990).

Σε έρευνα κατά την κατασκευή και στάθμιση της κλίμακας Λογικομαθηματικής Σκέψης αξιολογήθηκε η ικανότητα αντίληψης χρονικής διαδοχής γεγονότων σε παιδιά 4-6 ετών, διαμέσου 3 δοκιμασιών σειροθέτησης ιστοριών (3 εικόνων έκαστη). Βρέθηκε ότι ένα μεγάλο ποσοστό (85%) του συνολικού δείγματος επιτυγχάνουν στις 2 ή 3 δοκιμασίες. Ένα μέρος 9.3% ολοκληρώνει μόνο μια από αυτές, ενώ ένα ποσοστό 5.6%, αποτυγχάνει τελείως, παρουσιάζοντας αντίστοιχα μέτρια και σοβαρή αδυναμία. Η ικανότητα αντίληψης της χρονικής διαδοχής φάνηκε ότι επηρεάζεται από την ηλικία, αφού διαπιστώθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ και των 4 εξαμήνων ηλικίας, από το μορφωτικό περιβάλλον και από τις ενδοατομικές διαφορές, επιβεβαιώνοντας τις παραπάνω έρευνες (Δελικανάκη, 2008).

Από τους Zacks & Tversky (2001) παρατίθενται οι παρακάτω βασικές επισημάνσεις για τη φύση, την αντίληψη και τη συγκρότηση των γεγονότων:

- Το γεγονός ορίζεται ως ένα τμήμα του χρόνου σε ένα δεδομένο τόπο που γίνεται αντιληπτό από έναν παρατηρητή ως έχον αρχή και τέλος. Τα γεγονότα δεν είναι πράξεις, μπορεί όμως να τις περιλαμβάνουν ή κάποιες πράξεις να είναι γεγονότα.
- Η αντίληψη των γεγονότων σχετίζεται με την επεξεργασία της γλώσσας, τη μνήμη, την αιτιότητα, το σχεδιασμό και τις πράξεις. Όσον αφορά στην αντίληψη και στην περιγραφή των γεγονότων μπορούμε να εφαρμόσουμε σε αυτά μια επεξεργασία αντίστοιχη με την επεξεργασία για την αντίληψη των αντικειμένων. Έτσι: α) Τα

γεγονότα αποτελούνται από μικρότερες μονάδες-μέρη ή σκηνές σε ένα σενάριο που συνιστούν το συνολικό γεγονός, β) μπορούν να γίνονται αντιληπτά σε μια ιεραρχική κάθετη κατηγοριοποίηση, γ) χαρακτηρίζονται από διακριτά μικρότερα μέρη, ενώ οι σχέσεις των μερών αυτών είναι σημαίνουσες φυσικής αιτιότητας ή σκοπών ή προθέσεων κοινωνικά καθορισμένων. Η αντίληψη των γεγονότων επηρεάζεται από την προϋπάρχουσα εμπειρία, τα κίνητρα, τις επιθυμίες, τις προσδοκίες.

- Όσον αφορά στη *συγκρότηση των γεγονότων*, ως ευρύτερων εννοιολογικών ενοτήτων, καταλήγουν ότι συγκροτούνται όπως και οι απλούστερες έννοιες, σύμφωνα με τη θεωρία των *σχημάτων (schemata)*, αλλά με περισσότερο πολύπλοκες διαδικασίες. Τα σχήματα, που είναι ένας τρόπος σημασιολογικής κωδικοποίησης των πληροφοριών και αναπαράστασης της γνώσης, έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορες θεωρίες από τον Bartlett στις έρευνες του για τη μνήμη, από τον Piaget στις απόψεις για την κατασκευαστική πορεία της γνωστικής ανάπτυξης, και από άλλους ερευνητές. Καθοριστικό ρόλο για τη συγκρότηση γεγονότων φαίνεται να έχει η αιτιότητα, οι σκοποί και το πολιτισμικό περιβάλλον, αλληλεπιδρώντας με τους ενδοατομικούς παράγοντες των μηχανισμών γνωστικής συγκρότησης. (Zacks & Tversky, 2001).

Συνοπτικά, οι παράγοντες που επηρεάζουν την αντίληψη των γεγονότων και τη σειροθέτηση αυτών σε δοκιμασίες χρονικής διαδοχής είναι αναπτυξιακοί, ενδοατομικοί και περιβαλλοντικοί.

2β. Η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων

Τα αριθμητικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης συνοψίζονται σε τρεις γενικές κατηγορίες σημασιολογικού περιεχομένου: *προβλήματα μεταβολής, σύνθεσης και σύγκρισης*. Η διαφορετική εννοιολογική δομή τους ανταποκρίνεται στα είδη των πρωτοποσοτικών σχημάτων, που αναπτύσσουν τα παιδιά πριν από το σχολείο, όπως αθροιστικά σχήματα αύξησης-μείωσης, δηλ. αντιλαμβάνονται τότε αυξάνεται και τότε μειώνεται μια ποσότητα και αθροιστικά σχήματα του τύπου σχέσεων μέρους-όλου δυο ποσοτήτων. Τα προβλήματα μεταβολής αναφέρονται σε μεταβολή, δυναμική αύξηση ή μείωση ποσότητας, αυτά της σύνθεσης αναφέρονται στη συνένωση δυο ποσοτήτων σε μια νέα υπερκατηγορία και αυτά της σύγκρισης αντίστοιχα στη στατική συνθήκη σύγκρισης δυο ποσοτήτων (Resnick, 1989).

Σε έρευνες έχει βρεθεί ότι μια μεγάλη πλειοψηφία παιδιών προσχολικής ηλικίας, πριν τη διδασκαλία πράξεων αριθμητικής (πρόσθεση, αφαίρεση) κατά την τυπική σχολική εκπαίδευση, είναι ικανά να λύνουν προφορικά αριθμητικά προβλήματα είτε μη-λεκτικά, διαμέσου άμεσης εκτίμησης με μια ματιά (*subitizing*), είτε εφαρμόζοντας τις αρχές της απαρίθμησης σε συλλογές που υφίστανται αριθμητική μεταβολή (Zur & Gelman, 2004). Παιδιά 3-5 ετών επιδεικνύουν εκπληκτικά υψηλή ικανότητα πρόσθεσης και αφαίρεσης όταν οι αριθμοί είναι μικροί-έως τρία. (Hughes, 1999).

Διάφορες μεταβλητές, όπως η γλωσσική διατύπωση, το σημασιολογικό περιεχόμενο της εκφώνησης, όπως επίσης και η ύπαρξη χειραπτικού υλικού, που υποστηρίζει τη λειτουργία εσωτερικής αναπαράστασης και κατανόησης των σχέσεων μεταξύ των όρων του αριθμητικού προβλήματος, η ύπαρξη ή μη πλαισίου με νόημα, επηρεάζουν την επίδοση των παιδιών, τα οποία μπορεί να επιδείξουν εξαιρετικές ικανότητες για λύση προβλημάτων, υποτιμημένες κατά το παρελθόν (Gelman &

Galistel, 1978, Ibarra, & Lindvall, 1982, Jordan, Huttenlocher & Levine, 1992, Carpenter et al, 1993, Κορνηλάκη, 2003).

Σε εφαρμογή των ερευνητικών δεδομένων, σύμφωνα με την Ένωση εκπαιδευτικών των Μαθηματικών των ΗΠΑ, η μέθοδος επίλυσης προβλήματος θεωρείται ως η πλέον σημαντική για τη διαμόρφωση των σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων των Μαθηματικών όλων των βαθμίδων, αποτελώντας έναν από τους βασικούς άξονες της μεθοδολογίας της μαθηματικής εκπαίδευσης για παιδιά από το νηπιαγωγείο μέχρι τη 12^η τάξη (NCTM, 2000). Ο εκπαιδευτικός της προσχολικής ηλικίας παροτρύνεται να επινοεί ο ίδιος ή τα παιδιά προβλήματα όλων των τύπων, (Charlesworth, 2005), ώστε να πλαισιώνεται η εννοιολογική μαθηματική γνώση με διαδικαστική γνώση, δηλ. στρατηγικές, στο ευρύτερο πλαίσιο του εποικοδομητισμού.

Στο ΝΠΣ των Μαθηματικών για το ελληνικό νηπιαγωγείο και στους στόχους της ενότητας «Αριθμοί & πράξεις» προτείνεται τα νήπια να διερευνούν καταστάσεις για να προσεγγίζουν τις 4 αριθμητικές πράξεις, καθώς και να κατασκευάζουν αντίστοιχα απλά προβλήματα. Ως προς τη μεθοδολογία, η επίλυση προβλήματος αναφέρεται τόσο στο γενικό πλαίσιο του ΔΕΠΠΣ και ειδικότερα στο ΑΠΣ των Μαθηματικών, όσο και στο ΝΠΣ. (ΔΕΠΠΣ, 2002, ΝΠΣ, 2011). Προτείνεται οι εκπαιδευτικοί να υποστηρίζουν τα νήπια να αναπτύσσουν τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος, συλλογισμού, γενίκευσης, τεκμηρίωσης, επικοινωνίας και σημειωτικής δράσης, ενώ επιδιώκεται η χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού.

Η μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων με περιεχόμενο από την καθημερινή ζωή, σύμφωνα με τις αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών (Ρ.Μ.), είναι πρωταρχικής σημασίας για τη μαθηματική ανάπτυξη των νηπίων, επισημαίνουν ερευνητές, οι οποίοι βρίσκουν βελτιωμένες τις μαθηματικές επιδόσεις παιδιών νηπιαγωγείου μετά από πειραματική παρέμβαση σχεδιασμένη σύμφωνα με τα Ρ.Μ. Επιπρόσθετα, ψηφιακές εφαρμογές των Ρ.Μ. μπορούν να δώσουν νέα ώθηση στη μαθηματική ανάπτυξη των νηπίων (Zaranis, Kalogiannakis, Papadakis, 2013, Papadakis, Kalogiannakis, Zaranis, 2016).

Στο ΝΠΣ Μαθηματικών για το Δημοτικό, η επίλυση προβλήματος αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Θεωρείται ότι οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα όταν τους παρέχονται ευκαιρίες διερεύνησης ιδεών διαμέσου επίλυσης προβλημάτων, συνειδητοποιώντας τη λειτουργική πτυχή, αλλά και την πολιτισμική και ιστορική διάσταση της κατασκευής της μαθηματικής γνώσης. Προτείνεται η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της μεθοδολογίας επίλυσης προβλημάτων και η ανάδειξη αυτής ως κεντρικός στόχος του προγράμματος σπουδών για τα Μαθηματικά (ΝΠΣ, 2011).

Η επίλυση προβλημάτων στο δημοτικό σχολείο αποτελεί μία σύνθετη γνωστική, μαθηματική διαδικασία και πρέπει να προσεγγίζεται και να αξιολογείται με πολλή προσοχή. Η αποτυχία των μαθητών στη σημαντική αυτή δεξιότητα προκαλεί έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον. Ιδιαίτερα για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά με τις χαρακτηριστικές γνωστικές ιδιαιτερότητες και αδυναμίες, το ερευνητικό ενδιαφέρον γίνεται ακόμη πιο έντονο. (Περικλειδάκης, 2005).

Σύμφωνα με τον Geary (1994), στην περίπτωση των μαθητών του δημοτικού σχολείου ιδιαίτερα σημαντικοί παράγοντες που συμβάλλουν στην επιτυχή επίλυση λεκτικών προβλημάτων θεωρούνται: α) η ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, β) το επίπεδο κατάρκτησης του λεξιλογίου των μαθηματικών και γ) η ικανότητα της

βραχυπρόθεσμης μνήμης, λόγω της έκτασης και των όρων του προβλήματος. Το λεξιλόγιο και η υπολογιστική ικανότητα των μαθητών μπορούν να βελτιωθούν με την κατάλληλη διδασκαλία και άσκηση και με την πάροδο του χρόνου. Ιδιαίτερη σημασία αποδίδεται στο ρόλο της βραχυπρόθεσμης μνήμης. Η επιβάρυνση της μνήμης εργασίας μειώνεται σημαντικά με τη βελτίωση της αναγνωστικής ικανότητας και της ταχύτητας ανάγνωσης, επειδή αυξάνεται ο αριθμός των λέξεων και των όρων που μπορεί να συγκρατηθούν και να επεξεργαστούν. (Περικλειδάκης, 2005).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στις καθημερινές ελεύθερες δραστηριότητες και στις ρουτίνες της προσχολικής τάξης, σε ευκαιριακές περιστάσεις και κατά την αξιοποίηση κατάλληλων αφηγηματικών ιστοριών, ανακύπτουν καταστάσεις διερεύνησης αριθμητικών πράξεων, τις οποίες οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αξιοποιούν και να τις διαπραγματεύονται με τα νήπια με τη μεθοδολογία επίλυσης προβλήματος: π.χ. καταγραφές απόντων-παρόντων, καταγραφές αγοριών-κοριτσιών, μοίρασμα γλυκών γενεθλίων, υπολογισμοί διάφοροι κ.α.. Ωστόσο, κατά ένα βήμα περαιτέρω, όταν ο εκπαιδευτικός παρέχει την ευκαιρία στα νήπια να αναπαραστήσουν σημειωτικά τις παρουσιαζόμενες προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες έχουν νόημα και ιδιαίτερη σημασία για τα ίδια, τότε οι καταγραφές τους του ελεύθερου σχεδίου, των σημειώσεων και των συμβόλων, ενισχύουν τη μαθηματική ανάπτυξη και τη μετάβαση από άτυπες σε πιο τυπικές μορφές αυτής (Παπανδρέου, 2007, Δελικανάκη, 2010; Χρονάκη & Μουντζούρη, 2009).

2γ. Μεθοδολογία καλής πρακτικής

Από την κατηγορία «Βάλε στη σωστή σειρά» της ιστοσελίδας οι νηπιαγωγοί 7 προσχολικών τάξεων αξιοποίησαν πρωταρχικό εκπαιδευτικό υλικό 2 αρχείων που παρουσιάζουν ιστορίες με 3 εικόνες έκαστη, κατά τη χρονική περίοδο του γ' σχολικού τριμήνου (Απρίλιος-Μάιος 2015). Στη μια ιστορία εξ αυτών εξελίσσεται ένα γεγονός διατήρησης αριθμητικής ποσότητας έπειτα από μεταβολή της θέσης των στοιχείων της στο χώρο. Στην άλλη ιστορία αναπτύσσεται το αριθμητικό πρόβλημα μεταβολής $10-5=5$ (με θέμα αγκάθια στο σώμα δεινοσαύρων), ενώ ζητείται αντίστοιχα η σωστή σειροθέτηση των καρτών από τα νήπια. Οι ιστορίες αυτές είχαν σχεδιαστεί από νήπια του 28^{ου} Νηπιαγωγείου Ηρακλείου στη διάρκεια παρελθούσης ερευνητικής κατασκευής ιστοριών με αριθμούς και είχαν αναρτηθεί στην ιστοσελίδα.

Τις ιστορίες αυτές, αφού οι εκπαιδευτικοί τις εκτύπωσαν σε χωριστές κάρτες, τις επεξεργάστηκαν στις τάξεις τους με συζήτηση, συλλογισμούς και άλλους χειρισμούς (σειροθέτηση), ενώ στη συνέχεια πρότειναν στα νήπια να σκεφτούν και να κατασκευάσουν αναλογικά τις δικές τους ατομικές ιστορίες με νοηματικό περιεχόμενο αριθμητικών προβλημάτων. Δόθηκε η οδηγία να χρησιμοποιήσουν οποιουσδήποτε αριθμούς ήθελαν, αποφεύγοντας να επαναλάβουν τους ίδιους αριθμούς των παραδειγμάτων. Τα νήπια κατά τη διάρκεια αυτής της κατασκευής μέσα σε επικοινωνιακή παιδαγωγική ατμόσφαιρα, ζήτησαν διευκρινίσεις, ανέπτυξαν ποικίλους συλλογισμούς, διαπραγματεύτηκαν αριθμητικές έννοιες και διαδικασίες, ενώ αξιοποίησαν ή ζήτησαν να διορθώσουν λάθη. Ως αποτέλεσμα δημιούργησαν με αυθεντικό τρόπο αντίστοιχα έργα, ενώ συγκεντρώθηκαν 61 έργα για τη 2η κατηγορία, κυρίως νηπίων, με λίγες συμμετοχές προνηπίων.

Η διαδικασία αποδείχθηκε εξαιρετικά δημιουργική, γεγονός που κρίνεται σημαντικό για την ποιότητα της διαδικασίας κατασκευής της μαθηματικής γνώσης (Κουλαϊδής, 2007). Προσεγγίζοντας τα έργα αυτά με ποιοτικές μεθόδους, διαπιστώσαμε ότι συνιστούν πολύ ενδιαφέρουσες εικονογραφημένες ιστορίες με 3 εικόνες έκαστη, συνοδευόμενες και από λεκτική επεξήγηση, στις οποίες εξελίσσεται ένα αριθμητικό πρόβλημα, με πλήθος διαφορετικών συνδυασμών αριθμών σε έκαστη τάξη. Χαρακτηριστικό της ποικιλομορφίας είναι ότι, μόνο 2 έργα, από διαφορετικές τάξεις μάλιστα, παρουσιάζουν τους ίδιους αριθμούς με το παράδειγμα, αλλά και αυτά έχουν διαφορετικό εννοιολογικό περιεχόμενο. Τα έργα παρουσιάζουν την αριθμητική μεταβολή με συνέπεια, δηλαδή σωστά σειροθετημένη και σε πλήρη αντιστοιχία εικονογράφησης των ασυνεχών ποσοτήτων, των αριθμητικών συμβόλων και της προφορικής επεξήγησης, γεγονός που αποδεικνύει την κατάκτηση της διαδικαστικής γνώσης από τα συγκεκριμένα νήπια, διαμέσου της γενίκευσης και της εφαρμογής σε νέο περιεχόμενο.

Στο παράδειγμα είχαν χρησιμοποιηθεί αριθμοί εντός της δεκάδας στην αριθμητική πράξη $10-5=5$. Στα 61 έργα που συγκεντρώθηκαν, 26 έργα αγοριών και 35 έργα κοριτσιών, παρατηρείται ένα ευρύ φάσμα αριθμητικών δεδομένων:

- 31 έργα (13αγοριών, 18κοριτσιών) χρησιμοποιούν αριθμούς μέσα στην 5άδα,
- 27 έργα (12 αγοριών, 15κοριτσιών) χρησιμοποιούν αριθμούς από 6-10,
- 3 έργα χρησιμοποιούν αριθμούς καθ' υπέρβαση της δεκάδας (13-6, 13-5, 13-3),
- 6 από τα παραπάνω έργα έχουν αποτέλεσμα το μηδέν.

Από αυτές τις ιστορίες αρκετές έχουν ήδη, μετά από μια σχετική επιμέλεια, αναρτηθεί στην κατηγορία «Βάλε στη σωστή σειρά», αποτελώντας νέο διδακτικό υλικό για παιδιά και εκπαιδευτικούς στη διαδικτυακή κοινότητα μάθησης. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να τις διαθέτουν στα νήπια, ώστε να τις χρησιμοποιούν ως χειραπτικό υλικό, παίζοντας με διάφορους τρόπους, είτε ατομικά, είτε σε μικρές ομάδες, ενώ ιδιαίτερα χρήσιμο αποβαίνει ως εισαγωγική οπτικοποιημένη διαδικασία για μαθητές με δυσκολίες στην Α' Δημοτικού. Κατ' επέκταση της προηγούμενης διαδικασίας, νέες ιστορίες μπορεί να σχεδιαστούν αντίστοιχα σε άλλες τάξεις και να αποσταλούν ώστε να συμπεριληφθούν στις αναρτημένες κ.ο.κ.

Αδυναμία απετέλεσε το γεγονός ότι δεν υπήρξε το χρονικό περιθώριο για να αναρτηθεί το παραπάνω υλικό εντός του ίδιου σχολικού έτους, ώστε τα παιδιά που κατασκεύασαν τις ιστορίες να τις δουν αναρτημένες στην ιστοσελίδα, γεγονός που δημιουργεί θετική συναισθηματική ενίσχυση και ενθουσιασμό, όπως είχε διαπιστωθεί από άλλες περιπτώσεις κατά τις οποίες κατέστη αυτό δυνατό.

3. Συμπεράσματα καλής πρακτικής

Σύμφωνα με την παραπάνω υλοποίηση και την ανάλυση των έργων, επισημαίνονται τα παρακάτω σημαντικά χαρακτηριστικά της καλής πρακτικής:

1. Η παρουσίαση του αριθμητικού προβλήματος με οπτικοποίηση σε 3 διακριτές φάσεις χρονικής διαδοχής το καθιστά ευκόλως αντιληπτό: η ανάλυση του γεγονότος σε 3 διακριτά χρονικά διαστήματα (αρχικό-επόμενο-τελικό) υποστηρίζει δυναμικά την αντίληψη της μεταβολής που συμβαίνει. Η παρουσίαση αυτή φαίνεται να δοκιμάζεται για πρώτη φορά, αφού συνήθως δίνεται από τους ερευνητές στα παιδιά 1 φύλλο χαρτιού για να σχεδιάσουν ένα πρόβλημα.

- Επιπλέον, η δυνατότητα να σειροθετούν τις κάρτες, ενισχύει την κατανόηση, ενώ ακόμα μπορεί να επιτρέπει και την αντίστροφη πορεία διατύπωσης.
2. Η γλώσσα υποστηρίζει τις αφηρημένες αριθμητικές διαδικασίες, προσδίδοντας τους νόημα σε πλαίσιο μικρής ιστορίας: οι αναπαραστάσεις εικονογράφησης και αριθμητικών συμβόλων των νηπίων συνοδεύτηκαν από προφορικό λόγο, ο οποίος απέδωσε ένα πλήρες νόημα, δείχνοντας ότι έγινε κατανοητή η έννοια της διαδοχής.
 3. Ενθαρρύνεται η δημιουργικότητα: οι μαθητές αφού κατανόησαν τη μεθοδολογία σύμφωνα με το παράδειγμα, παρήγαγαν έργα με διαφορετικό νοηματικό περιεχόμενο και με διαφορετικά ποσοτικά σχήματα πρόσθεσης/αφαίρεσης. Χαρακτηριστικά, ακόμα και σε ελάχιστα έργα που μιμήθηκαν θεματικά το παράδειγμα, τα νήπια το απέδωσαν με διαφορετικούς αριθμούς.
 4. Ενισχύονται κρίσιμες διαδικασίες γνωστικής ανάπτυξης: αξιοποιήθηκε και ενισχύθηκε η δημιουργία εσωτερικής αναπαράστασης, ο αναλογικός συλλογισμός, η γνωστική διαδικασία της σειροθέτησης, της γενίκευσης και εφαρμογής σε νέο περιεχόμενο, της μεταγνωστικής δημιουργίας, καθώς και της επίλυσης προβλήματος. Στις ιστορίες αρκετές φορές χρειάστηκε να διερευνήσουν τα παιδιά έννοιες ως προς τα μεγέθη και τη χωρική τοποθέτηση των εικονογραφημένων στοιχείων τους, στο πλαίσιο του προβλήματος, π.χ. πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ένας κύκλος για να χωρέσει μέσα 5 στοιχεία. Ακόμα, υποβοηθείται η αντιστρεψιμότητα της σκέψης, αφού πολλές ιστορίες μπορεί να σειροθετούνται από την τρίτη εικόνα προς την πρώτη, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία.
 5. Αξιοποιείται η βιωματική προσέγγιση: τα αριθμητικά προβλήματα διατυπώθηκαν από τα παιδιά σύμφωνα με τα προσωπικά βιώματα της καθημερινότητας και τις αντιλήψεις τους, κατεύθυνση που συνάδει με τις αρχές των Ρεαλιστικών Μαθηματικών.
 6. Ενισχύονται τα προσωπικά κίνητρα μάθησης: η δυνατότητα προσωπικής κατασκευής (construct) κάθε παιδιού, καθώς και η δυνατότητα ανάρτησης-παρουσίασης ενίσχυσε το κίνητρο τους για επιτυχία. Τα παιδιά επέδειξαν ζωηρή επιθυμία να δημιουργήσουν επιτυχημένες ιστορίες, έτσι κάποια ζητούσαν διευκρινίσεις, διορθώσεις με διορθωτικό διάλυμα, κάποια ακόμα πρόσθετες σελίδες για να ξανασχεδιάσουν, ενώ κάποιο παιδί πρόσθεσε και 4η κάρτα-σελίδα.
 7. Η ποικιλία προβλημάτων που προκύπτουν υποστηρίζει τη διαφοροποίηση της μάθησης: σε ατμόσφαιρα υποστήριξης τα παιδιά κατασκεύασαν προβλήματα-ιστορίες με μικρούς αριθμούς (π.χ. $2-1=1$), που παρουσιάζουν ερευνητικό ενδιαφέρον ως σχήματα απαρχών αριθμητικών πράξεων.
 8. Οι μαθητές μπορούν να αποκτούν ευχέρεια στην αντίληψη και κατασκευή προβλημάτων και να ενισχύουν την απομνημόνευση ποσοτικών σχημάτων πρόσθεσης/αφαίρεσης: παίζοντας με τις κάρτες της ιστοσελίδας η οπτικοποίηση με ταυτόχρονη εικονιστική και συμβολική αναπαράσταση συμβάλλει στην καλύτερη απομνημόνευση και αυτοματοποίηση των λειτουργιών αυτών.
 9. Η συνεργατική ατμόσφαιρα λειτουργεί υπέρ της διαμεσολάβησης της μάθησης για τους μικρότερους ή λιγότερο ικανούς, σύμφωνα και με τον Vygotsky. Σε περιπτώσεις που μιμήθηκαν τον διπλανό τους, δημιούργησαν προσωπικά έργα. Ακόμα η παρουσίαση των έργων στην ολομέλεια ενισχύει το κλίμα επικοινωνίας,.

10. Η ανάρτηση των αριθμητικών ιστοριών στην ιστοσελίδα δίνει την ευκαιρία σε εκπαιδευτικούς απομακρυσμένων τάξεων να τις αξιοποιούν ως εκπαιδευτικό υλικό και να προσεγγίζουν έτσι καινοτόμες πρακτικές.

Καταληκτικά, σε επόμενο βήμα της εργασίας σχεδιάζεται η μετατροπή της κατηγορίας σε διαδραστική, με περιεχόμενο πάντα πρωτότυπο υλικό μαθητών, διαμέσου κατασκευαστικών μαθηματικών διαδικασιών. Σαφές ζητούμενο του παιδαγωγικού οφέλους για τους εκπαιδευτικούς αναδεικνύεται η επιμόρφωση αυτών στις νέες προσεγγίσεις διδασκαλίας των Μαθηματικών και στις νέες τεχνολογίες. (Κασιμάτη, 2003).

Βιβλιογραφικές πηγές και Δικτυογραφία

Bornens, M.-T. (1990). Problems brought about by «reading» a sequence of pictures. *Journal of Experimental Psychology*, 49, 189-226.

Charlesworth, R. (2005). *Experiences in Math for young children*. NY. Thomson Delmar Learning.

Carpenter, T.P., Ansell, E., Franke, M.L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving : A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 427-440.

Δεληκανάκη, Ν. (2008). *Πρώιμη ανίχνευση διαταραχών γνωστικής ανάπτυξης: η περίπτωση δυσκολιών λογικομαθηματικής σκέψης κατά την προσχολική ηλικία*. Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Δεληκανάκη, Ν. (2010). Μαθηματικά και Λογοτεχνία: κατανόηση εννοιών πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μέσα από την επίλυση προβλημάτων εντός πλαισίου έργων παιδικής λογοτεχνίας. Πρακτικά 7^{ου} Συνεδρίου ΠΕΕ, Ρέθυμνο.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, ΦΕΚ τεύχος Β' 303 /13-3-2003, 304/13-3-2003.

Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών. (2010). Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στα ΚΣΕ: *Αξιοποίηση και Εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδακτική πράξη*. Τόμ. 1, Γενικό μέρος. (1^η εκδ.). Πάτρα: ΕΑΙΤΥ.

Zacks, J. & Tversky, B. (2001). Event structure in perception and conception. *Psychological Bulletin*, 127, 3-21.

Zaranis, N., Kalogiannakis, M., & Papadakis, S. (2013). Using Mobile Devices for Teaching Realistic Mathematics in Kindergarten Education. *Creative Education (Special Issue in Preschool Education)*, 4 (7A1), 1-10.

Zur, O. & Gelman, R. (2004). Young children can add and subtract by predicting and checking. *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 121-137.

Fivush, R. & Mandler, J. (1985). Developmental changes in the understanding of Temporal Sequence. *Child Development*, 56, 1437-1446.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

- <http://web20erc.eu/sites/default/files/Pedagogy2.0-GR.pdf> Η Παιδαγωγική του Ιστού 2.0 (Web 2.0)
- <http://digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/3094/1/Tzortzakis.pdf> Αξιοποίηση Web 2.0 εργαλείων στη σχολική εκπαίδευση.
- [https://www.academia.edu/1889905/ Web 2.0](https://www.academia.edu/1889905/Web_2.0) Η χρήση του Web 2.0 για τη διεξαγωγή μαθήματος Διδακτικής της Πληροφορικής και των ΤΠΕ.
- Hughes, M. (1999). *Τα παιδιά και η έννοια των αριθμών*. Αθήνα. Gutenberg.
- Ibarra, C. & Lindvall, C. (1982). Factors associated with the ability of kindergarten children to solve simple arithmetic story problems. *Journal of Educational Research*, 75, 149-155.
- Jordan, N., Huttenlocher, J. & Levine, S. (1992). Differential calculation abilities in young children from a middle-and low-income families. *Developmental Psychology*, 28, 644-653.
- Κασιμάτη, Κ. (2003). Άξονες προσέγγισης της διδακτικής των μαθηματικών στην προσχολική ηλικία. *Σύγχρονο Νηπιαγωγείο*, 82, 94-102.
- Κορνηλάκη, Αικ. (2003). Η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων από παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 35, 131-147.
- Κουλαϊδής Βασίλης (επιμ.). (2007). *Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη της Κριτικής - Δημιουργικής Σκέψης. Για Α/θμια Εκπ/ση*. Αθήνα: ΟΕΠΕΚ.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Standards for Grades Pr-K-2. Reston, VA: Author.
- NAEYC (2004). Guidelines for Appropriate Curriculum Content and Assessment in Programs Serving Children Ages 3 Through 8.
- Νέα Προγράμματα Σπουδών. (ανασύρθηκε το Σεπτέμβριο του 2011). <http://digitalschool.minedu.gov.gr>
- Papadakis, St., Kalogiannakis, M., & Zaranis, N. (2016). Improving Mathematics Teaching in Kindergarten with Realistic Mathematical Education. *Early Childhood Educational Journal*, First-on-line article, DOI 10.1007/s10643-015-0768-4.
- Παπανδρέου, Μ. (2007). «Παραμύθι-μύθι-μύθι, δώσε κλώτσο ... ν' αριθμήσει"- οι «σημειώσεις» παιδιών νηπιαγωγείου, όταν ένα παραμύθι δίνει νόημα στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Στο: Πρακτικά 6^{ου} Πανελ. Συνεδρίου ΟΜΕΠ, 298-305.
- Περικλειδάκης, Γ. (2005). Η κατανόηση και επίλυση λεκτικών προβλημάτων από μαθητές του δημοτικού σχολείου με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά: μια πειραματική διδασκαλία. Πρακτικά 4^{ης} Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, 22, 23/4/2005, ΠΤΔΕ Παν/μίου Κρήτης.
- Περικλειδάκης, Γ. (2006). Η διδασκαλία των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης σε μαθητές δημοτικού με μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά, *Επιστήμες της Αγωγής*, 1/2006, 99-111.

- Resnick, L. (1989). Αναπτύσσοντας τη μαθηματική γνώση. Στο: Βοσνιάδου, Σ. (1999). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*. Αθήνα. Gutenberg
- Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.
- Τζεκάκη, Μ. (2011). *Μαθηματικά για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Επιμόρφωση Εκπαιδευτών Εκπαιδευτικών*. Αθήνα.
- Χρονάκη, Α. & Μουντζούρη, Γ. (2009). Αφήγηση, αριθμοί και συμβολική δράση : στιγμές κατανόησης γραπτού συμβολισμού στις μικρές ηλικίες. Πρακτικά 3^{ου} συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ, Παν/μια Αιγαίου, Ρόδος, 425-435.